

Первый день. 8–9 класс

14 марта

1. Вася решал пример на сложение двух дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, где a, b, c, d — некоторые числа, отличные от 0. Однако он спутал и вместо сложения верно выполнил умножение этих дробей. При этом ответ у Васи совпал с ответом в задачнике. Выясните, чему в таком случае равна сумма дробей $\frac{b}{a}$ и $\frac{d}{c}$.

2. В марсианском баскетболе в составе команды ровно шесть игроков. Тренер сборной Марса может собрать состав из любых шести игроков среди 100 кандидатов. При этом некоторые составы тренер считает *сыгранными*, а некоторые — нет (хотя бы один сыгранный состав существует). Назовём пятерку кандидатов *перспективной*, если к ней можно добавить еще одного кандидата и получить сыгранный состав. Назовём кандидата *универсальным*, если он дополняет до сыгранного состава любую перспективную пятерку кандидатов (в которую он сам не входит). Тренер собрал состав из шести универсальных кандидатов. Обязательно ли этот состав является сыгранным?

3. Найдите наименьшее натуральное n , для которого верно следующее утверждение: если натуральные числа a и b таковы, что $a + b$ делится на 36, а ab делится на n , то каждое из чисел a и b делится на 36.

4. В остроугольном треугольнике ABC сторона AB меньше стороны BC , BH_b — высота, точка O — центр описанной окружности. Прямая, проходящая через H_b параллельно прямой CO , пересекает прямую BO в точке X . Докажите, что точка X и середины сторон AB и AC лежат на одной прямой.

Первый день. 10–11 класс

14 марта

1. Точки A и B лежат на разных ветвях гиперболы, заданной уравнением $y = \frac{1}{x}$. Пусть A_x и A_y — проекции точки A на координатные оси, а B_x и B_y — проекции точки B на координатные оси. Докажите, что площади треугольников AB_xB_y и BA_xA_y равны.

2. В марсианском баскетболе в составе команды ровно шесть игроков. Тренер сборной Марса может собрать состав из любых шести игроков среди 100 кандидатов. При этом некоторые составы тренер считает *сыгранными*, а некоторые — нет (хотя бы один сыгранный состав существует). Назовём пятерку кандидатов *перспективной*, если к ней можно добавить еще одного кандидата и получить сыгранный состав. Назовём кандидата *универсальным*, если он дополняет до сыгранного состава любую перспективную пятерку кандидатов (в которую он сам не входит). Тренер собрал состав из шести универсальных кандидатов. Обязательно ли этот состав является сыгранным?

3. В остроугольном треугольнике ABC сторона AB меньше стороны BC , BH_b — высота, точка O — центр описанной окружности. Прямая, проходящая через H_b параллельно прямой CO , пересекает прямую BO в точке X . Докажите, что точка X и середины сторон AB и AC лежат на одной прямой.

4. Существуют ли такие 101 натуральных чисел, не обязательно различных, произведение которых равно сумме всех их попарных наименьших общих кратных?